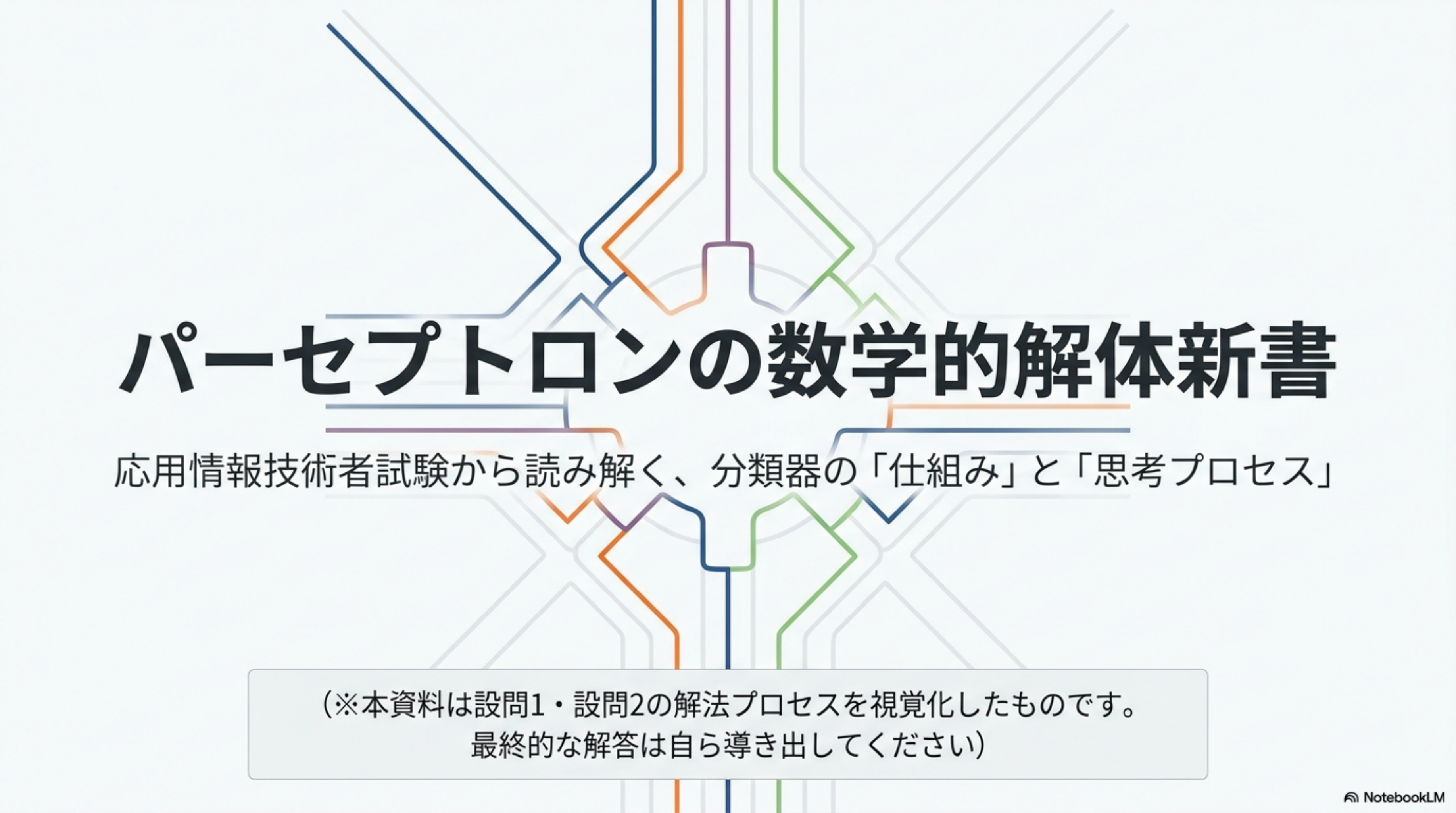




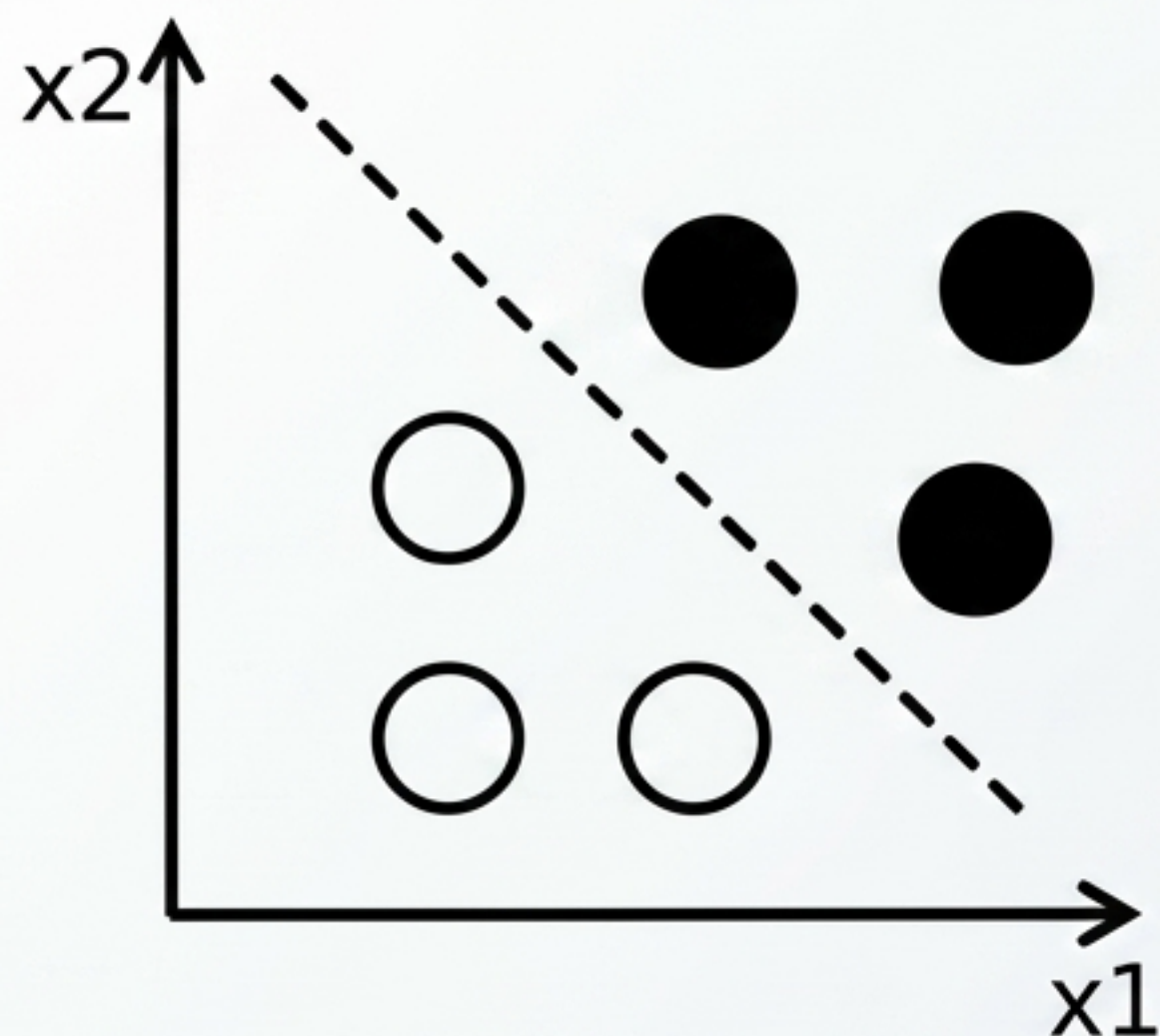
パーセプトロンの数学的解体新書

応用情報技術者試験から読み解く、分類器の「仕組み」と「思考プロセス」

(※本資料は設問1・設問2の解法プロセスを視覚化したものです。
最終的な解答は自ら導き出してください)

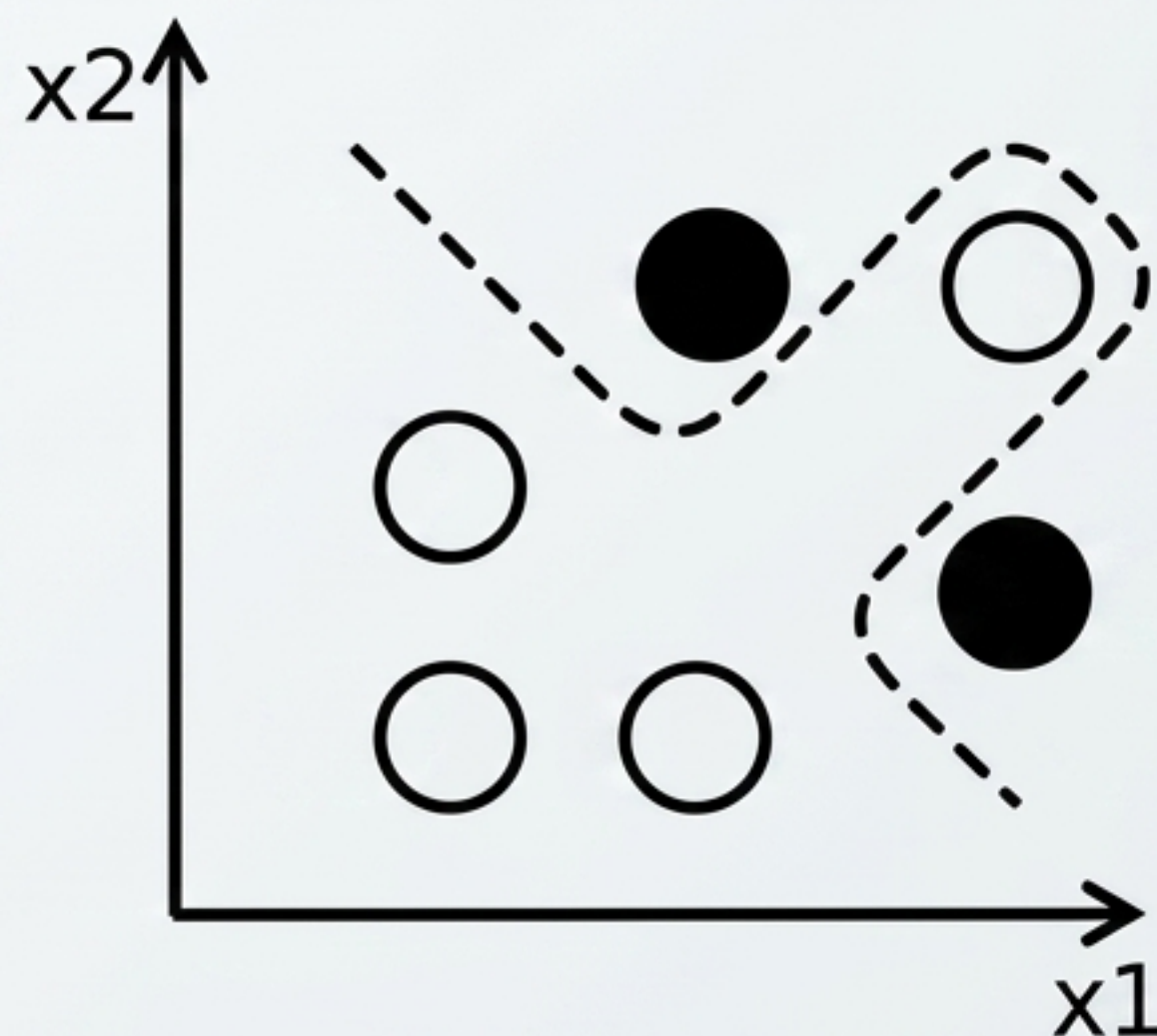
ニューラルネットワークの使命：「分類」

機械学習における中核的なタスクは、データを正しく分類（境界線を引く）すること。問題の性質によって、必要な境界線の形は異なります。



線形問題 (Linear)

- 1本の直線で完璧に分割可能。



非線形問題 (Non-linear)

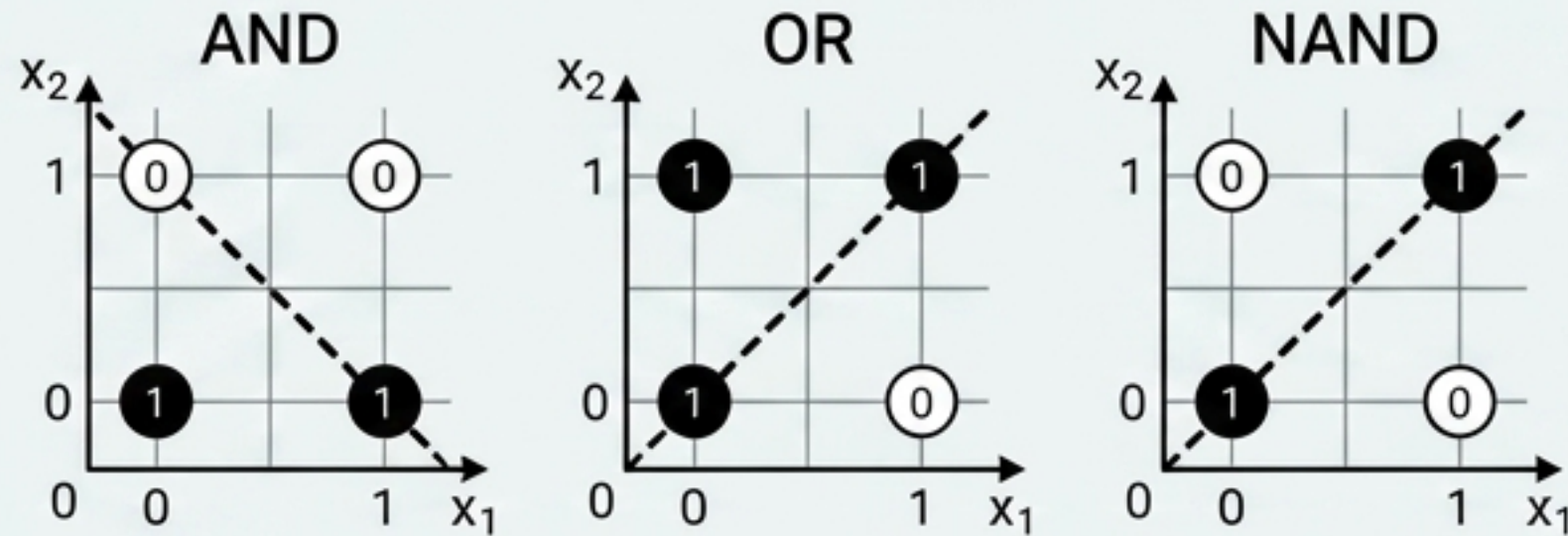
- 直線では分割不可能。複雑な曲線が必要。

論理演算の空間マッピング

デジタル世界の論理演算も、2次元平面上の座標として可視化できます。

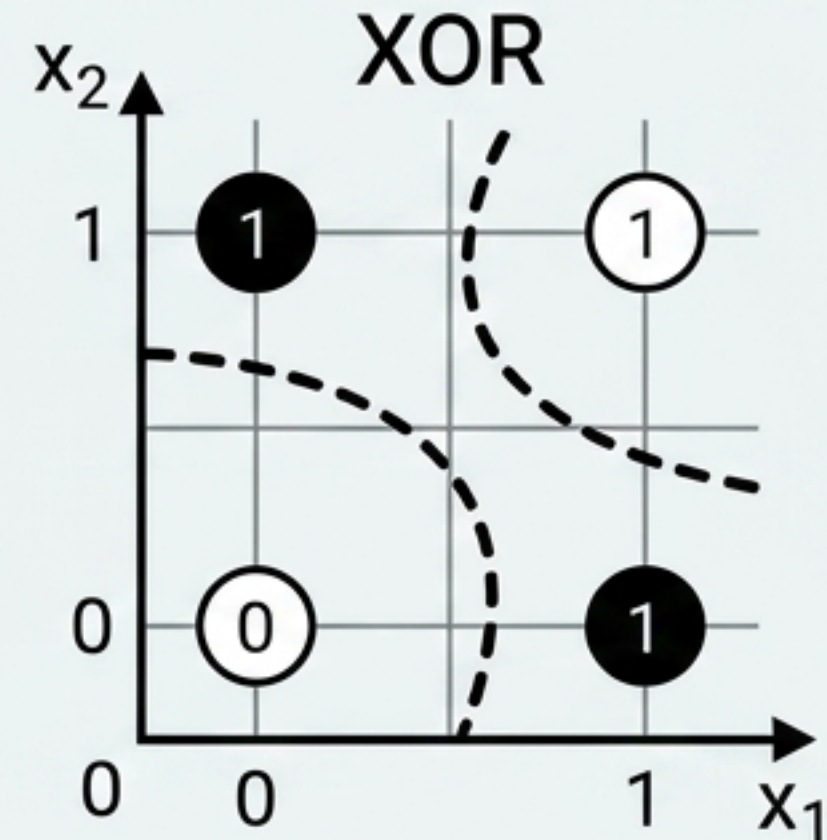
【線形グループ】

単純な直線で分類可能



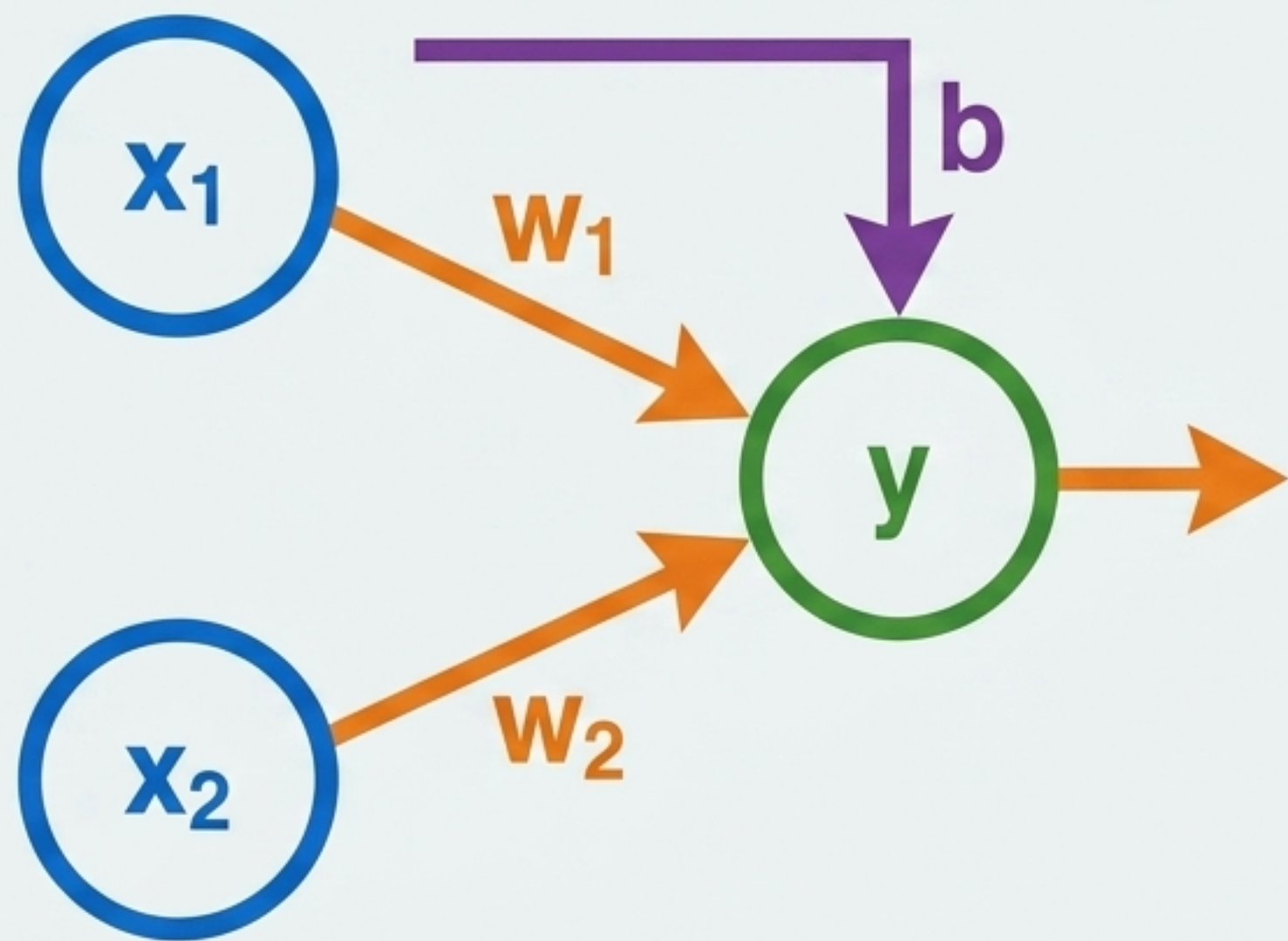
【非線形グループ】

直線では絶対に分類できない特殊な配置



単純パーセプトロンの構造と発火条件

線形問題を解くための基本ユニット。入力値と重みの総和にバイアスを加え、その値が「0」を超えるかどうかで出力を決定します。



【判定式】

$$(x_1 \times w_1) + (x_2 \times w_2) + b = \text{合計値}$$

ルール：合計値が 0以下 なら $y = 0$

ルール：合計値が 0より大きい なら $y = 1$

ミッション1：論理積（AND）のバイアスを導出せよ

設問1の目標は、単純パーセプトロンを「ANDゲート」として機能させるための正しいバイアス値 **[a]** を見つけ出すことです。

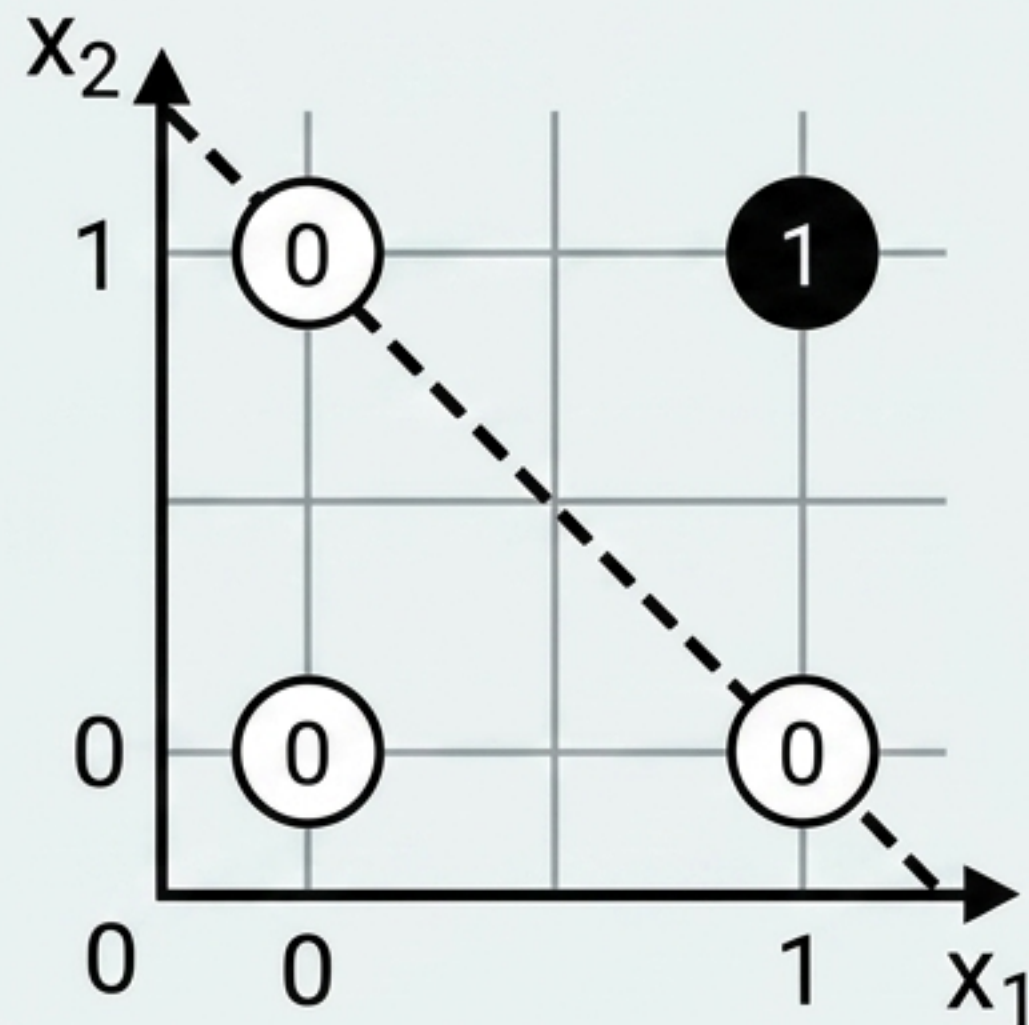
単純パーセプトロンで各論理演算を計算するための重みとバイアスの例

論理演算	w1	w2	b
論理積	0.5	0.5	[a]
論理和	0.5	0.5	-0.2
否定論理積	-0.5	-0.5	0.7

Parameters Box

- 重み (w1) : 0.5
- 重み (w2) : 0.5
- バイアス (b) : ? **[a]**

論理積（AND）の空間マッピング



解析アプローチ：論理のルールを「数式の制約」に変換する

ANDゲートには4つの入力パターンがあります。それぞれのパターンが満たすべき出力を、パーセプトロンの判定式に代入し、バイアス b に対する4つの条件式（不等式）を作成します。

x1	x2	y



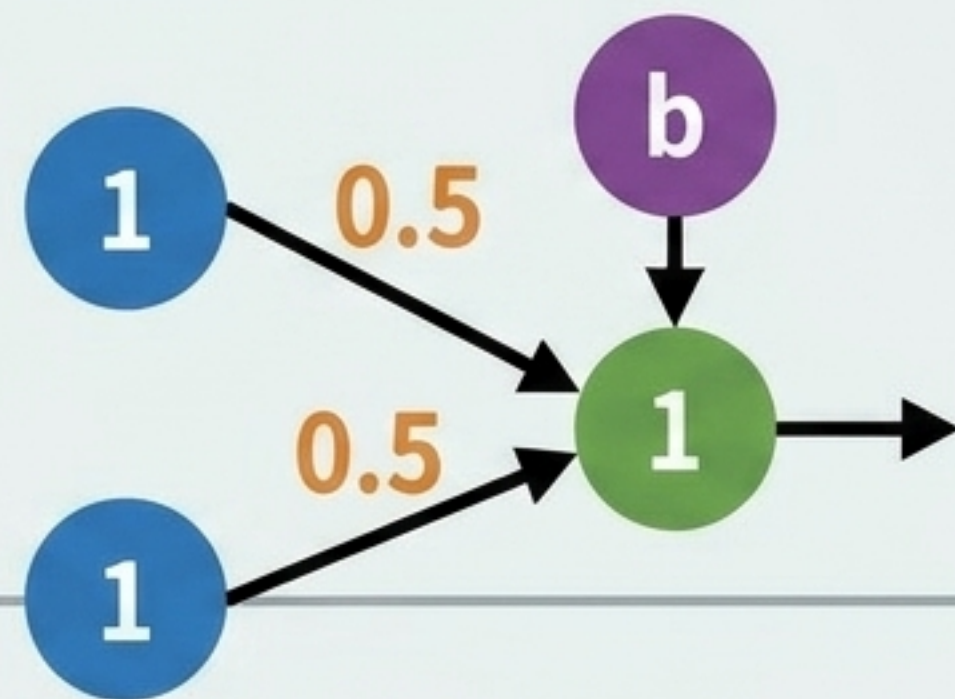
Step 1:
入力パターンの網羅
(x1, x2の全組み合わせ)

Step 2:
期待される
出力(y)の確認

Step 3:
判定式への代入と
不等式の導出

条件1：「出力が1になる」唯一のケース

ANDゲートは、両方の入力が「1」の時だけ「1」を出力します。つまり、判定式の合計値は0より大きくなければなりません。



Math Block

- 1 入力: $x1=1, x2=1 \rightarrow$ 期待する出力: $y=1$
- 2 代入: $(1 \times 0.5) + (1 \times 0.5) + b > 0$
- 3 計算: $0.5 + 0.5 + b > 0$
- 4 結果: $1 + b > 0 \Rightarrow$ 【制約A】: $b > -1$

条件2～4：「出力が0になる」 3つのケース

残る3つの入力パターンでは、出力はすべて「0」でなければなりません。
つまり、判定式の合計値は0以下に抑え込む必要があります。

$$x1=1, x2=0$$

$$\begin{aligned} & (1 \times 0.5) + \\ & (0 \times 0.5) + b \leq 0 \\ & 0.5 + b \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{【制約B】} : b \leq -0.5$$

$$x1=0, x2=1$$

$$\begin{aligned} & (0 \times 0.5) + \\ & (1 \times 0.5) + b \leq 0 \\ & 0.5 + b \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{【制約C】} : b \leq -0.5$$

$$x1=0, x2=0$$

$$\begin{aligned} & (0 \times 0.5) + \\ & (0 \times 0.5) + b \leq 0 \\ & 0 + b \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{【制約D】} : b \leq 0$$

導き出された4つの制約と、解答への鍵

すべての論理条件を数式化しました。
これら4つの不等式を「すべて同時に満たす」値こそが、求めるバイアスです。

Constraints Summary

- **b** は -1 より大きい
- **b** は -0.5 以下である
- **b** は 0 以下である

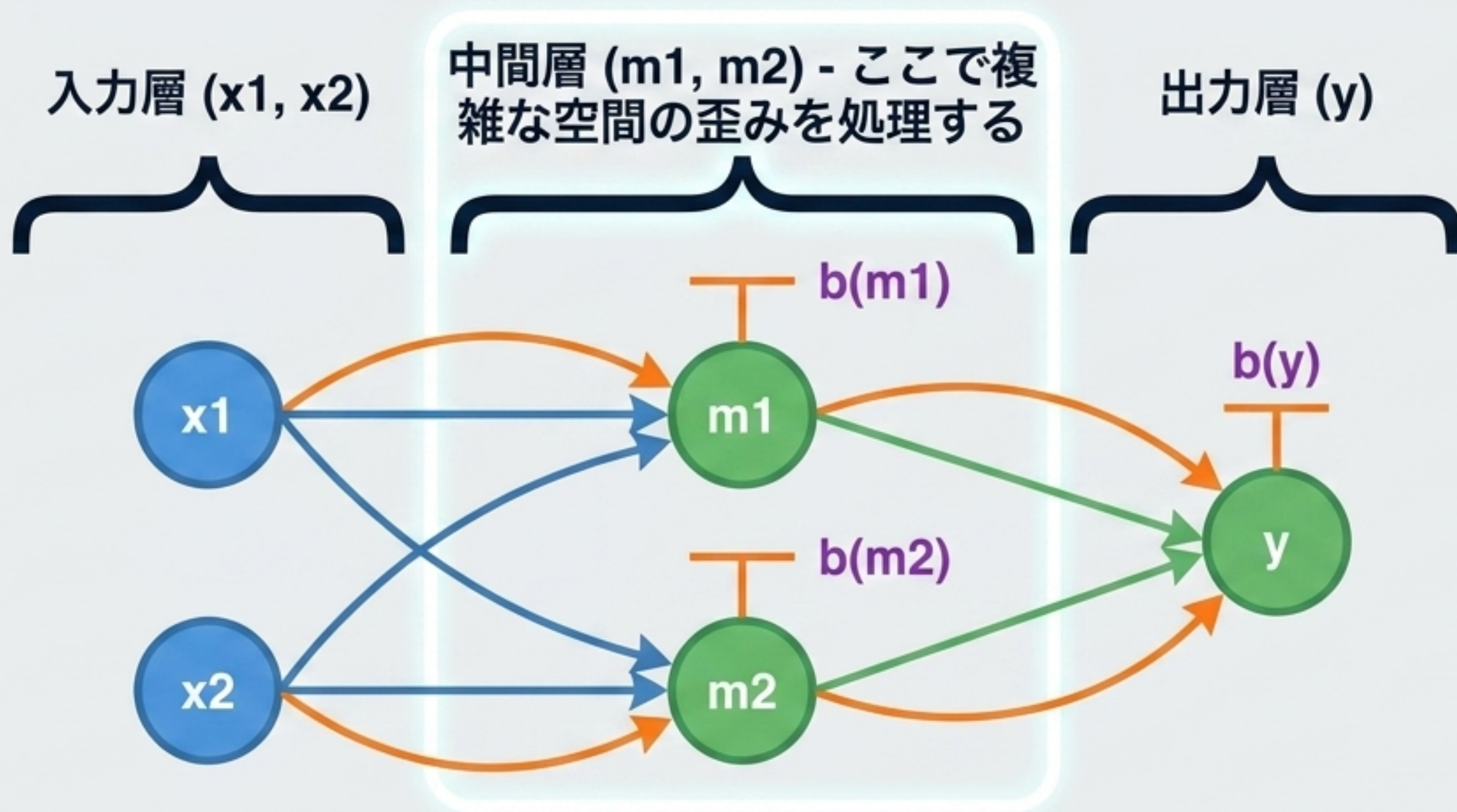
解答群

ア： -0.7 イ： -0.2
ウ： 0.2 エ： 0.7

全ての条件をクリアする値はどれか？
どれか？（※解答はご自身で
導き出してください）

限界突破：3層パーセプトロンの登場

排他的論理和 (XOR) のような「非線形問題」は、単純パーセプトロンでは決して解けません。この限界を突破するため、入力と出力の間に「中間ノード ($m1, m2$)」を持つ3層構造が登場します。



ミッション2：特定ノードの信号を追跡せよ

設問2の目的は、ネットワーク全体を計算することではありません。指定された入力状態において、特定の間ノード「m2」がどのような値を出力するかを計算します。

表3 3層パーセプトロンで排他的論理和を計算するための重みとバイアスの例（抜粋）

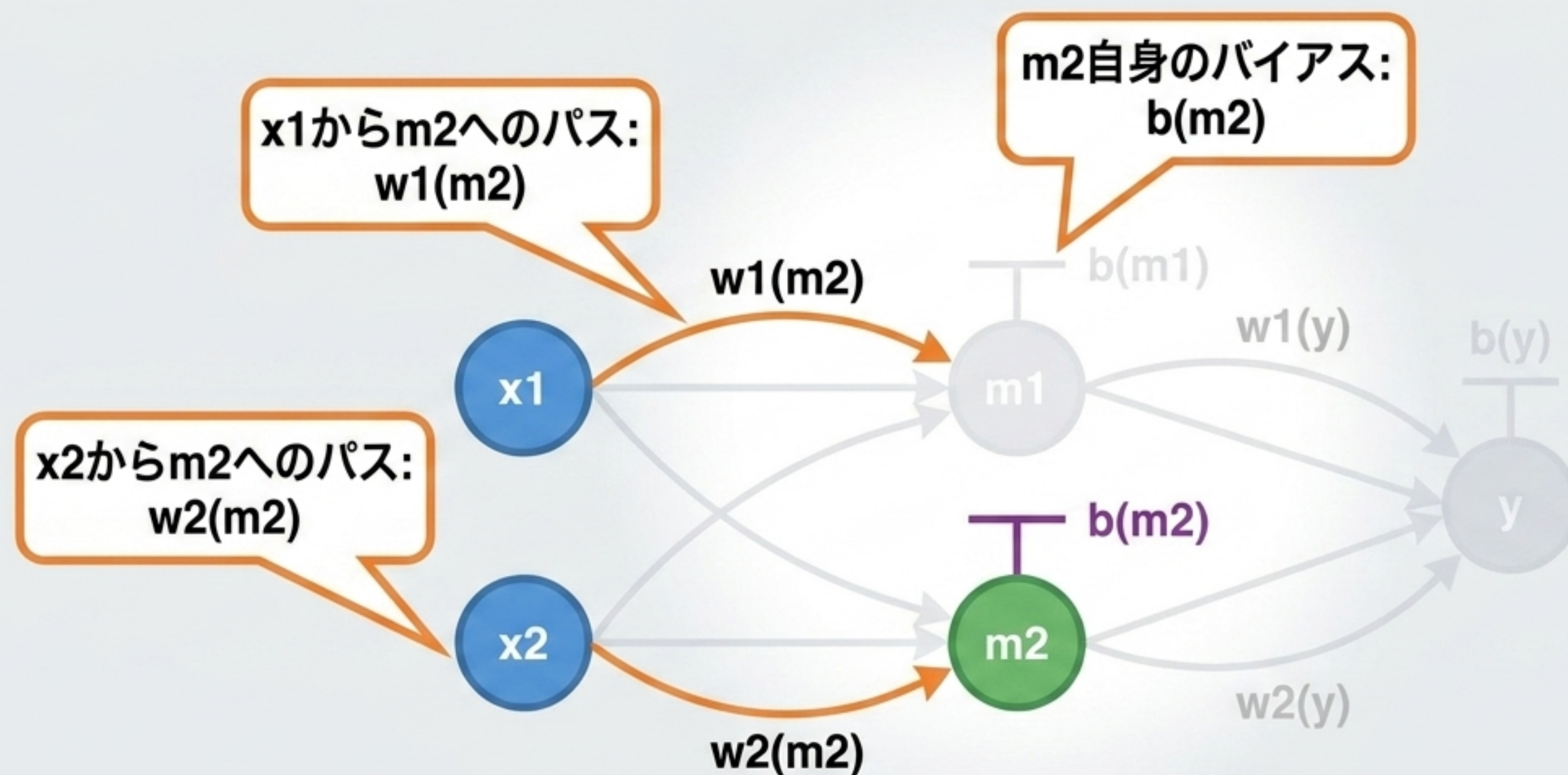
ノード	w1	w2	b
m1	0.5	0.5	-0.2
m2	-0.5	-0.5	0.7
y	0.5	0.5	-0.6

目標パラメータ (Target Parameters)

- 監視対象：中間ノード **m2**
- 入力条件： $x1 = 1$, $x2 = 0$
- 使用するデータ：排他的論理和のパラメータ表（表3）

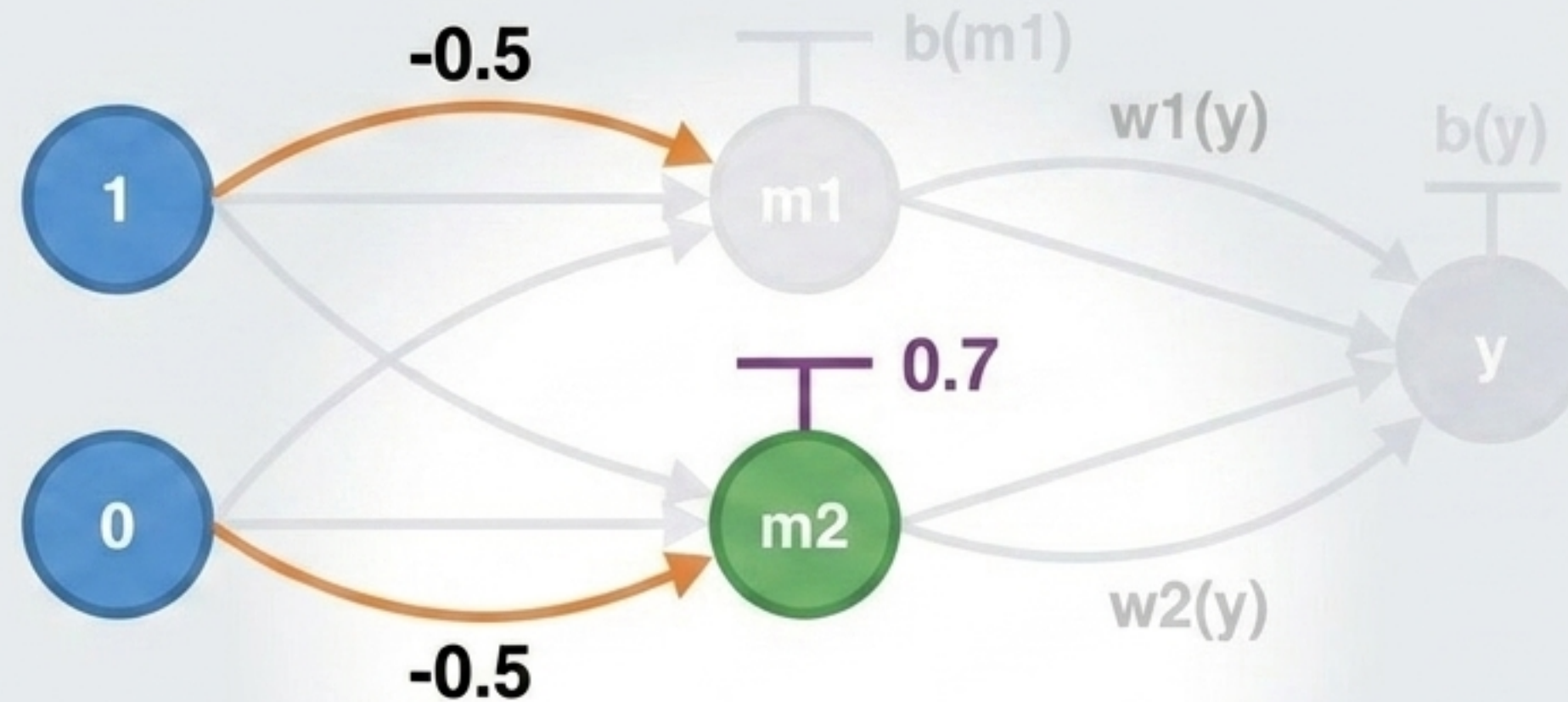
回路の分離：ノード「m2」へのデータパス

複雑な図に惑わされないでください。ノード m2 の出力を知るために必要なのは、m2 に直接流れ込む信号（アーク）と、そのノード自身のバイアスだけです。m1 や y は無視して構いません。



パラメータの代入と回路の構築

表3から m2 に関するパラメータを抽出し、先ほど分離した回路図に当てはめます。
入力値もセットし、計算の準備が整いました。

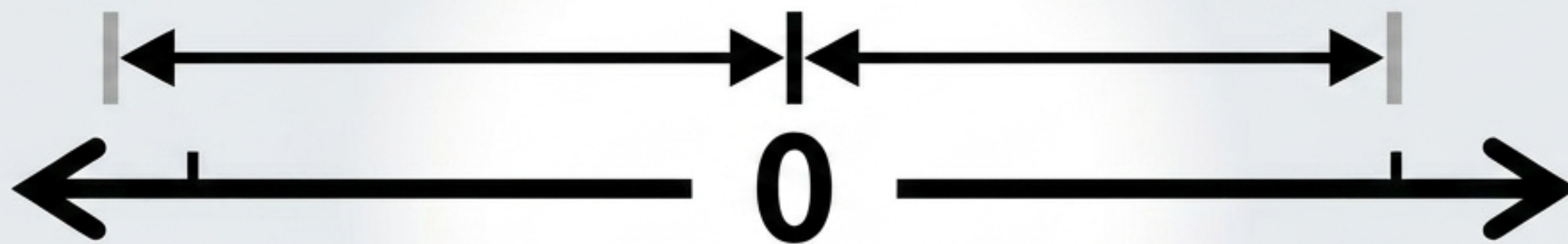


- 入力: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$
- アークの重み: $w_1(m_2) = -0.5$, $w_2(m_2) = -0.5$
- バイアス: $b(m_2) = 0.7$

最終判定：閾値（0）は超えるか？

すべての値が揃いました。あとは単純パーセプトロンと同じルールを適用するだけです。総和を計算し、出力が「1」になるか「0」になるか判定してください。

$$(1 \times -0.5) + (0 \times -0.5) + 0.7 = 【 ??? 】$$



合計値が 0 以下の場合
→ $m2 = 0$

合計値が 0 より大きい場合
→ $m2 = 1$

(※計算を行い、最終的なm2の出力値を導き出してください)