

****カラツバ法 (Karatsuba 法) ****は、1960 年にロシアの数学者アナトリー・カラツバによって考案された、掛け算の計算回数を減らして高速化するアルゴリズムです。

通常の筆算で 2 桁×2 桁の計算を行うと、1 桁同士の掛け算が **4 回**必要になります。しかしカラツバ法では、足し算や引き算を工夫して組み合わせることで、掛け算の回数を **3 回**に減らすことができます。

具体例として「12 × 34」をカラツバ法で計算する手順を説明します。

ステップ 1：数を分割する

まず、掛け算をする 2 つの数を、上位の桁と下位の桁に 2 分割します（今回は 10 進数なので基数となる 10 で分割します）。

- 12 → 上位 1 と 下位 2
- 34 → 上位 3 と 下位 4

ステップ 2：3 つの掛け算を行う

次に、以下の 3 パターンの掛け算を行います。

1. 上位桁同士の掛け算（これを z_2 とします）

$$z_2 = 1 \times 3 = 3$$

2. 下位桁同士の掛け算（これを z_0 とします）

$$z_0 = 2 \times 4 = 8$$

3. 「上位桁+下位桁」同士の掛け算

$$(1 + 2) \times (3 + 4) = 3 \times 7 = 21$$

※通常の筆算であれば、ここで交差する掛け算（ 1×4 と 2×3 ）を行います。カラツバ法では行いません。

ステップ 3：中間項を計算する

本来必要だった「交差する掛け算の合計」にあたる部分（これを z_1 とします）を、ステップ 2 で求めた 3 つの計算結果を使った**引き算**によって導き出します。

- $z_1 = (\text{パターン 3 の答え}) - z_2 - z_0$
- $z_1 = 21 - 3 - 8 = 10$

（※実際に $1 \times 4 + 2 \times 3$ を計算しても 10 になり、一致していることがわかります）

ステップ 4：結果を合成する

最後に、計算した（上位）、（中間）、（下位）を、桁をずらしながら足し合わせます。

- は 100 の位（基数の 2 乗）なので： $3 \times 100 = 300$
- は 10 の位（基数の 1 乗）なので： $10 \times 10 = 100$
- は 1 の位なのでそのまま：8

これらを合計します。 $300 + 100 + 8 = 408$

無事に「 $12 \times 34 = 408$ 」という答えが求まりました。

カラツバ法の凄さ

たかだか 2 桁×2 桁の計算では「普通に計算した方が早いのでは？」と思うかもしれませんが、この「4 回の掛け算を 3 回に減らせる魔法」の真価は、桁数が大きくなったときに発揮されます。

たとえば、1024 桁×1024 桁の掛け算をする場合、普通の筆算（ N^2 回の計算）では約 100 万回の掛け算が必要ですが、カラツバ法を繰り返し適用していくと約 5 万 9000 回（ $O(N^{1.585})$ の計算量）にまで計算回数を減らすことができます。コンピュータで何千・何万桁という巨大な数（多倍長整数）を扱う世界では、この工夫が圧倒的な速度の差を生み出しています